

# 二维下投式探空仪反演的理论分析与数值试验<sup>\*</sup>

方涵先 黄思训

解放军理工大学气象学院, 南京 211101

**摘要** 借助于刚性示踪物在背景流场中运动的流体动力学方程建立了下投式探空仪运动的数学模型. 利用变分伴随方法结合正则化思想对下投式探空仪测风的二维模型进行了数值试验, 并对反演结果与构造的精确值进行比较, 试验结果表明该方法对示踪物轨迹反演是十分有效的.

**关键词** 下投式探空仪 伴随模型 正则化方法

随着 GPS 技术和计算科学技术的发展, 许多传统的测风方法受到了挑战. 在伊拉克战争中, 英美联军利用接收 GPS 数据的下投式探空仪测定战区的大气流场, 有力地保障了高技术武器的打击精度. 但由于种种原因, 这方面的技术和资料都未公开. GPS 能够准确测定探空仪的速度数据、位置数据, 如何充分利用这些数据来重构大气背景流场的物理参数是研制下投式探空仪的核心技术之一.

最优控制理论<sup>[1]</sup>在大气科学领域的应用, 使得气象资料的四维变分同化有了长足的发展<sup>[2~4]</sup>. 资料变分同化技术的实质是利用一切有效的信息去修正模式, 最优确定大气运动方程组的初值、边值与参数. 我们利用下投式探空仪在下投过程中取得的 GPS 定位资料, 利用变分同化技术对二维风场进行反演. 众所周知, 参数反演的问题往往是不适定的<sup>[5,6]</sup>, 所谓不适定, 即解不一定存在, 即使解存在亦不一定惟一, 在解存在惟一时也不一定稳定. 于是我们在利用变分伴随方法反演的同时, 结合了正则化思想<sup>[5~8]</sup>, 目的是对解作一些约束, 使得把原来不适定的问题变为适定, 黄思训等<sup>[9,10]</sup>把正则化思想引进到资料变分同化中去, 在整体资料的变分同化、局部资料的变分同化上取得了一系列良好

的结果.

本文在对示踪物在流体中运动的完整的受力分析的基础上, 建立了示踪物在流场中运动的三维流体动力学模型. 利用变分伴随方法结合正则化思想, 给出了下投式探空仪测风的二维反演模型, 并进行了数值试验. 试验结果表明利用该模型对反演大气流场及摩擦系数收到了良好的效果.

## 1 刚性示踪物的运动方程

假设背景流场的参数为: 密度  $\rho_{\text{流}}$ 、粘性系数  $\mu$ 、运动速度  $v$ , 则刚性示踪物在背景流场中的受力情况为: 重力  $F_{\text{重力}} = mg$ 、浮力  $F_{\text{浮力}} = -m_{\text{流}}g$  ( $m_{\text{流}}$  为刚性示踪物排开流体的质量)、变速运动附加力  $F = -m' \frac{D(v_{\text{物}} - v_{\text{流}})}{Dt}$  (其中  $m'$  为附加质量,

对于形状为圆球的示踪物附加质量为  $\frac{1}{2} m_{\text{流}}$ 、附加力是当示踪物相对于背景流场作变速运动时, 在原背景流场中诱导出一个新的流场而产生的力), 粘性阻力是压差阻力和摩擦阻力的总和, 对于固定形状的示踪物粘性摩擦系数  $c_d$  是示踪物 Reynolds 数  $Re$  的函数, 对于刚性圆球状的示踪物利用文献 [11] 中 Castleman 给出的  $c_d \sim Re$  关系如下:

2003-11-19 收稿, 2004-04-09 收修改稿

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 40075014, 40175014)与上海市科协重点基金(02DJ14032)资助项目

$$c_d = \begin{cases} 24/Re & Re \geq 1 \\ 24/Re^{0.646} & 1 < Re \leq 400 \\ 0.5 & 400 < Re \leq 3 \times 10^5 \\ 3.66 \times 10^{-4} \times Re^{0.4275} & 3 \times 10^5 < Re \leq 2 \times 10^6 \\ 0.18 & 2 \times 10^6 < Re \end{cases} \quad (1)$$

波阻是当示踪物在背景流场中运动的速度接近于音速时，即运动示踪物的 Mach 数达到临界值时，在示踪物的表面产生的局部激波称之为波阻。这里由于示踪物的运动速度远小于音速，所以忽略波阻的影响。

根据牛顿第二定律得到刚性示踪物在背景流场中的运动方程为：

$$m_{物} \frac{D\mathbf{v}_{物}}{Dt} = -m_{物} \mathbf{g}k + m_{物} \mathbf{g}k - m' \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} - \left[ \frac{\pi d^2 \rho_{流}}{8} \right] \cdot c_d \cdot \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r \quad (2)$$

其中  $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{物} - \mathbf{v}_{流}$ ，是刚性示踪物和背景流场的相对速度。

在直角坐标系  $o-xyz$  中方程(2)的分量形式为：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_2 \frac{dv_{fx}}{dt} - \alpha_3 \cdot c_d \cdot \left[ \frac{dx}{dt} - v_{fx} \right] \cdot v_r \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha_2 \frac{dv_{fy}}{dt} - \alpha_3 \cdot c_d \cdot \left[ \frac{dy}{dt} - v_{fy} \right] \cdot v_r \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{dv_{fz}}{dt} - \alpha_3 \cdot c_d \cdot \left[ \frac{dz}{dt} - v_{fz} \right] \cdot v_r \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\alpha_1 = \frac{(m_{物} - m_{流})g}{m_{物} + m'}$ ,  $\alpha_2 = \frac{m'}{m_{物} + m'}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi d^2 \rho_{流}}{8(m_{物} + m')}$ ,

$$v_r = \sqrt{\left[ \frac{dx}{dt} - v_{fx} \right]^2 + \left[ \frac{dy}{dt} - v_{fy} \right]^2 + \left[ \frac{dz}{dt} - v_{fz} \right]^2}$$

## 2 二维情况下投式探空仪反演的理论分析

利用三维刚性示踪物的运动方程(3)结合下投式探空仪的具体情况，我们建立下投式探空仪在二维背景大气流场中运动的方程如下：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_2 u_1 - \alpha_3 \beta_1(t) \left[ \frac{dx}{dt} - u \right] \cdot \sqrt{\left[ \frac{dx}{dt} - u \right]^2 + \left[ \frac{dz}{dt} - w \right]^2} \quad (4a)$$

$$\frac{du}{dt} = u_1 \quad (4b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \alpha_1 + \alpha_2 w_1 - \alpha_3 \beta_2(t) \left[ \frac{dz}{dt} - w \right] \cdot \sqrt{\left[ \frac{dx}{dt} - u \right]^2 + \left[ \frac{dz}{dt} - w \right]^2} \quad (4c)$$

$$\frac{dw}{dt} = w_1 \quad (4d)$$

$$x|_{t=0} = x_0, x|_{t=t_f} = x_f, u|_{t=0} = u_0, w|_{t=t_f} = 0,$$

$$z|_{t=0} = z_0, z|_{t=t_f} = 0,$$

其中  $\alpha_1 = \frac{(m_{物} - m_f)g}{m + m'}$ ,  $\alpha_2 = \frac{m'}{m_{物} + m'}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi d^2 \rho_f}{8(m_{物} + m')}$ .  $x, z$  为探空仪水平方向和垂直方向的位移.  $z_0$  为下投式探空仪的初始高度,  $u_1, w_1$  为水平方向和垂直方向大气气流的加速度.  $x_0, x_f$  为下投式探空仪水平方向的初始位置和末端位置,  $t_f$  为探空仪落地的时间(此时间由下投式探空仪精确测定).  $z_0, x_0, x_f, t_f$  为已知常数,  $u(t), w(t), \beta_1(t), \beta_2(t)$  是未知函数需通过反演方法最优确定.  $\beta_1(t), \beta_2(t)$  是水平方向和垂直方向的摩擦系数. 对于球形刚性示踪物理论上可以给出摩擦系数和 Reynolds 数的精确关系如(1)式, 但对于伞状下投式探空仪理论上尚无法给出摩擦系数的精确表达式. 摩擦系数不仅与探空仪的形状结构有关, 还与当时当地的风场结构相关. 现在的问题是: 假定空降区域下投式探空仪下投的路径  $x_{obs}(t), z_{obs}(t)$ 、由 GPS 装置精确测定视为已知, 寻找最优的模式变量  $u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t)$  使得

$$J[u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\gamma_1(z - z_{obs})^2 + \gamma_2(x - x_{obs})^2] dt \quad (5)$$

达到极小.  $u(t), w(t)$  分别由  $u_1(t), w_1(t)$  对时间积分即可得到. 如果只采用(5)式的目标泛函,

利用变分伴随方法求出泛函梯度  $\Delta_{u_1} J, \Delta_{w_1} J, \Delta_{\beta_1} J, \Delta_{\beta_2} J$ , 再利用共轭梯度法求出  $u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t)$  会产生如下一系列问题: (1) 泛函下降速度慢; (2) 反演结果会产生振荡现象; (3) 解的收敛精度较低; (4) 是迭代过程往往会溢出. 其主要原因是(5)式的目标泛函在某种意义上缺乏“凸性”, 另一方面问题解是否存在惟一没有从理论上加以证明, 于是我们根据反问题中的正则化思想, 引进稳定泛函以克服问题的不适定. 改进目标泛函如下:

$$J[u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t)] = \frac{1}{2} \int_0^t [\gamma_1(z - z_{\text{obs}})^2 + \gamma_2(x - x_{\text{obs}})^2] dt + \frac{1}{2} \int_0^t [\gamma_3 z^2 + \gamma_4 x^2] dt, \quad (6)$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  的选择既考虑量纲的一致性又起到权重的作用, 而  $\gamma_3, \gamma_4$  作为正则化项中的正则化参数.

下面分 3 步导出目标泛函关于  $u_1, u_2, \beta_1, \beta_2$  的梯度.

第 1 步: 导出(4)式的切线性模式

对  $u_1, u_2, \beta_1, \beta_2$  作扰动如下:

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow u_1(t) + \alpha \hat{u}_1(t), \\ w_1(t) &\rightarrow w_1(t) + \alpha \hat{w}_1(t), \\ \beta_1(t) &\rightarrow \beta_1(t) + \alpha \hat{\beta}_1(t), \\ \beta_2(t) &\rightarrow \beta_2(t) + \alpha \hat{\beta}_2(t). \end{aligned}$$

记  $x, u, z, w$  和  $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}, \tilde{w}$  分别为未扰动和扰动后方程组(4)的解. 令  $\tilde{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{x} - x}{\alpha}, \tilde{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{u} - u}{\alpha}, \tilde{z} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{z} - z}{\alpha}, \tilde{w} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{w} - w}{\alpha}$  定义  $V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - w\right)^2}$ . 则  $\hat{x}, \hat{u}, \hat{z}$  与  $\hat{w}$  满足如下切线性方程:

$$\frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} = \frac{d\hat{x}}{dt} \left[ -\beta_1 V - \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] +$$

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat{z}}{dt} \left[ -\beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] + \\ &u \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] + \\ &\alpha_2 \hat{u}_1 + w \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] + \\ &\beta_1 \left[ - \left( \frac{dx}{dt} - u \right) V \right], \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} - \hat{u}_1 = 0, \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{z}}{dt^2} &= \frac{d\hat{z}}{dt} \left[ -\beta_2 V - \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] + \\ &\frac{d\hat{x}}{dt} \left[ -\beta_2 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] + \\ &u \left[ \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right) \left( \frac{dx}{dt} - u \right) V^{-1} \right] + \\ &\alpha_2 \hat{w}_1 + w \left[ \beta_2 V + \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] + \\ &\beta_2 \left[ \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V \right], \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dt} - \hat{w}_1 = 0, \quad (7d)$$

$$\hat{x}|_{t=0} = 0, \hat{x}|_{t=t_f} = 0,$$

$$\hat{u}|_{t=0} = 0, \hat{u}|_{t=t_f} = 0,$$

$$\hat{z}|_{t=0} = 0, \hat{z}|_{t=t_f} = 0,$$

$$\hat{w}|_{t=t_f} = 0. \quad (7e)$$

第 2 步: 导出  $J[u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t)]$  在  $(u_1(t), w_1(t), \beta_1(t), \beta_2(t))$  上沿着方向  $\hat{u}_1, \hat{w}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  的方向导数.

按泛函的定义可知,

$$J'[u_1, w_1, \beta_1, \beta_2; \hat{u}_1, \hat{w}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2] = \int_0^t [\Delta_{u_1} J \circ \hat{u}_1 + \Delta_{w_1} J \circ \hat{w}_1 + \Delta_{\beta_1} J \circ \hat{\beta}_1 + \Delta_{\beta_2} J \circ \hat{\beta}_2] dt$$

另一方面利用泛函具有表达式(6)可知,

$$\begin{aligned} &J'[u_1, w_1, \beta_1, \beta_2; \hat{u}_1, \hat{w}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[\tilde{u}_1, \tilde{w}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2] - J[u_1, w_1, \beta_1, \beta_2]}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{t_f} \gamma_1 (z - z_{\text{obs}}) \dot{z} dt + \int_0^{t_f} \gamma_2 (x - x_{\text{obs}}) \dot{x} dt + \int_0^{t_f} [\gamma_4 \dot{z} \dot{z} + \gamma_3 \dot{x} \dot{x}] dt \\
 &= \int_0^{t_f} \gamma_1 (z - z_{\text{obs}}) \dot{z} dt + \int_0^{t_f} \gamma_2 (x - x_{\text{obs}}) \dot{x} dt + (\gamma_4 \dot{z} \dot{z} + \gamma_3 \dot{x} \dot{x}) \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} (\gamma_4 \ddot{z} \dot{z} + \gamma_3 \ddot{x} \dot{x}) dt. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{t_f} \dot{x} \frac{d^2 P}{dt^2} dt + \left[ \hat{u} Q \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \hat{u} \frac{dQ}{dt} dt \right] + \left[ \frac{d\hat{z}}{dt} R \Big|_0^{t_f} - \hat{z} \frac{dR}{dt} \Big|_0^{t_f} + \int_0^{t_f} \hat{z} \frac{d^2 R}{dt^2} dt \right] + \left[ \hat{w} S \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \hat{w} \frac{dS}{dt} dt \right] - \int_0^{t_f} \hat{u}_1 Q dt - \int_0^{t_f} \hat{w}_1 S dt. \quad (10)
 \end{aligned}$$

利用边界条件(7e)

$$\begin{aligned}
 \text{上式} &= \int_0^{t_f} \{ [\gamma_1 (z - z_{\text{obs}}) - \gamma_4 \dot{z}] \dot{z} + [\gamma_2 (x - x_{\text{obs}}) - \gamma_3 \dot{x}] \dot{x} \} dt,
 \end{aligned}$$

于是有如下关系式:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{t_f} [\Delta_{u_1} J \cdot \hat{u}_1 + \Delta_{w_1} J \cdot \hat{w}_1 + \Delta_{\beta_1} J \cdot \beta_1 + \Delta_{\beta_2} J \cdot \beta_2] dt \\
 &= \int_0^{t_f} [\gamma_1 (z - z_{\text{obs}}) - \gamma_4 \dot{z}] \dot{z} dt + \int_0^{t_f} [\gamma_2 (x - x_{\text{obs}}) - \gamma_3 \dot{x}] \dot{x} dt. \quad (9)
 \end{aligned}$$

第3步: 导出系统(7)的伴随方程、伴随边界条件及泛函的梯度形式.

引入系统(7)的伴随变量( $P, Q, R, S$ ), 对于(7a), (7b), (7c)式和(7d)式两边分别乘以  $P, Q, R, S$ , 并在区域 $[0, t_f]$ 上积分相加, 其左边为

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{t_f} \frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} \cdot P dt + \int_0^{t_f} \frac{d\hat{u}}{dt} \cdot Q dt + \int_0^{t_f} \frac{d^2 \hat{z}}{dt^2} \cdot R dt + \int_0^{t_f} \frac{d\hat{w}}{dt} \cdot S dt - \int_0^{t_f} \hat{u}_1 Q dt - \int_0^{t_f} \hat{w}_1 S dt \\
 &= \left[ \frac{d\hat{x}}{dt} P \Big|_0^{t_f} - \hat{x} \frac{dP}{dt} \Big|_0^{t_f} + \right.
 \end{aligned}$$

下面来计算右边, 分段计算如下: (7a)式乘以  $P$  并在区域 $[0, t_f]$ 上积分的右边为

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{t_f} \frac{dx}{dt} \left[ -\beta_1 V - \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \cdot P dt + \int_0^{t_f} \frac{dz}{dt} \left[ -\beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \cdot P dt + \int_0^{t_f} \hat{u} \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \cdot P dt + \int_0^{t_f} \alpha_2 \hat{u}_1 \cdot P dt + \int_0^{t_f} \hat{w} \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \cdot P dt + \int_0^{t_f} \beta_1 \left[ - \left( \frac{dx}{dt} - u \right) V \right] \cdot P dt, \quad (11)
 \end{aligned}$$

由于  $P|_{t=0}=0, P|_{t=t_f}=0$  可得下式:

$$\begin{aligned}
 &\hat{x} \left[ -\beta_1 V - \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \cdot P \Big|_0^{t_f} = 0 \text{ 以及} \\
 &\hat{z} \left[ -\beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \cdot P \Big|_0^{t_f} = 0,
 \end{aligned}$$

于是(11)式可化简为

$$\int_0^{t_f} \hat{x} \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \cdot P \right\} dt +$$

$$\int_0^{t_f} z \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ P \right\} dt +$$

$$\int_0^{t_f} u \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \circ P dt +$$

$$\int_0^{t_f} \alpha_2 \hat{u}_1 \circ P dt +$$

$$\int_0^{t_f} \hat{w} \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ P dt +$$

$$\int_0^{t_f} \beta_1 \left[ - \left( \frac{dx}{dt} - u \right) V \right] \circ P dt, \quad (12)$$

(7c)式乘以  $R$  并在区域  $[0, t_f]$  上积分并引入伴随边界条件  $R|_{t=0}=0, R|_{t=t_f}=0$  则其右边为

$$\int_0^{t_f} z \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_2 V + \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] \circ R \right\} dt +$$

$$\int_0^{t_f} x \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_2 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ R \right\} dt +$$

$$\int_0^{t_f} u \left[ \beta_2 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ R dt +$$

$$\int_0^{t_f} \alpha_2 \hat{w}_1 \circ R dt +$$

$$\int_0^{t_f} \hat{w} \left[ \beta_2 V + \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] \circ R dt +$$

$$\int_0^{t_f} \beta_2 \left[ - \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V \right] \circ R dt, \quad (13)$$

在此基础上我们引入伴随如下:

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \circ P \right\} +$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_2 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ R \right\} +$$

$$\gamma_1 (x - x_{obs}) - \gamma_3 \ddot{x}, \quad (14a)$$

$$-\frac{dQ}{dt} = \left[ \beta_1 V + \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right)^2 V^{-1} \right] \circ P +$$

$$\left[ \beta_2 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ R, \quad (14b)$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} \right] \circ P \right\} +$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[ \beta_2 V + \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] \circ R \right\} +$$

$$\gamma_2 (x - x_{obs}) - \gamma_4 \ddot{z}, \quad (14c)$$

$$-\frac{dS}{dt} = \left[ \beta_1 \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V^{-1} P + \right.$$

$$\left. \left[ \beta_2 V + \beta_2 \left( \frac{dz}{dt} - w \right)^2 V^{-1} \right] R \right], \quad (14d)$$

其伴随边界条件为

$$P|_{t=0} = 0, P|_{t=t_f} = 0, Q|_{t=t_f} = 0,$$

$$R|_{t=0} = 0, R|_{t=t_f} = 0, S|_{t=0} = 0.$$

把(14)式代入(13)式, 再利用泛函导数的表达式(9)可得梯度形式为:

$$\left( \Delta_u J, \Delta_w J, \Delta_\beta J, \Delta_\beta J \right)^T = \left[ \alpha_2 P + Q, \alpha_2 R + S, \right.$$

$$\left. - \left( \frac{dx}{dt} - u \right) V \circ P, - \left( \frac{dz}{dt} - w \right) V \circ P \right], \quad (15)$$

记  $M^k = (u_1, w_1, \beta_1, \beta_2)$ , 根据梯度的关系式, 再利用下式迭代求解:

$$U^{k+1} = U^k + (\Delta_u J)_{M^k} \circ \rho_i. \quad (16)$$

### 3 算法及算例

设背景大气垂直气流的状态参数为: 密度  $1.2 \text{ kg/m}^3$  粘性系数  $\mu$  为  $1.49 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . 探空仪的参数为: 直径  $1 \text{ m}$ 、密度  $80 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度  $g$  为  $9.8 \text{ m/s}^2$ , 设探空仪的初始高度  $H$  为  $2000 \text{ m}$ .

已知水平方向风速为  $u_f^T = 0.2 t$  ( $t$  为时间), 垂直气流为  $w_f^T = 2 \text{ (m/s)}$  ( $500 \text{ m} < H \leq 2000 \text{ m}$ ),  $w_f^T = 4 \times 10^{-3} \times H$  ( $0 \leq H < 500 \text{ m}$ ), 摩擦系数  $\beta_1, \beta_2$  的真值取(1)式的形式.

则解(4)式的正问题可得探空仪的位移随时间的变化. 水平方向如图(1)所示、垂直方向如图(2)所示, 把解正问题得到的位移作为观测资料, 输入

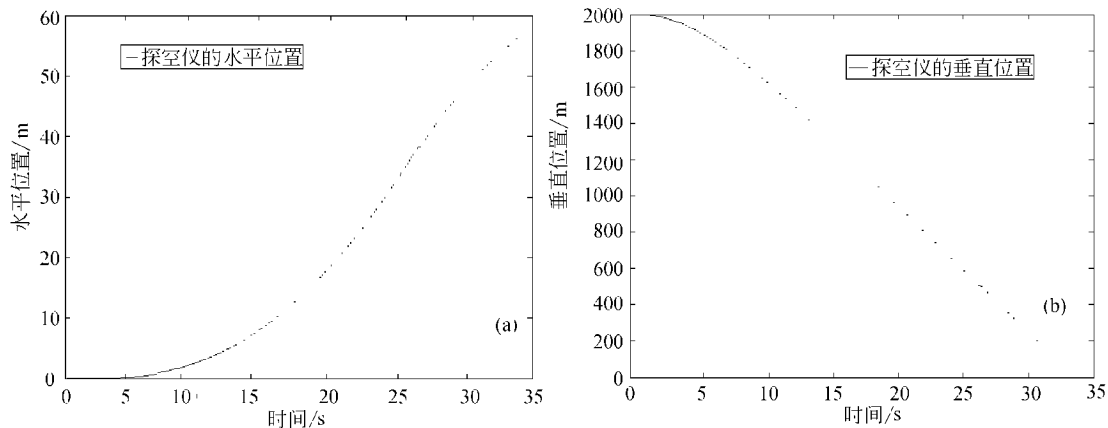


图 1 探空仪位置随时间的变化

(a) 水平位置变化; (b) 垂直位置变化

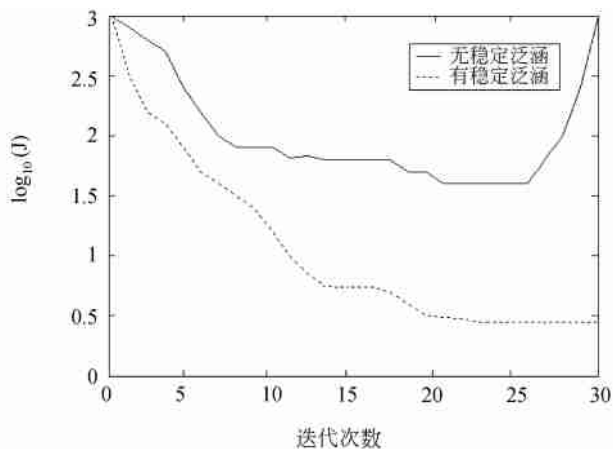


图 2 两种泛涵随迭代次数的变化

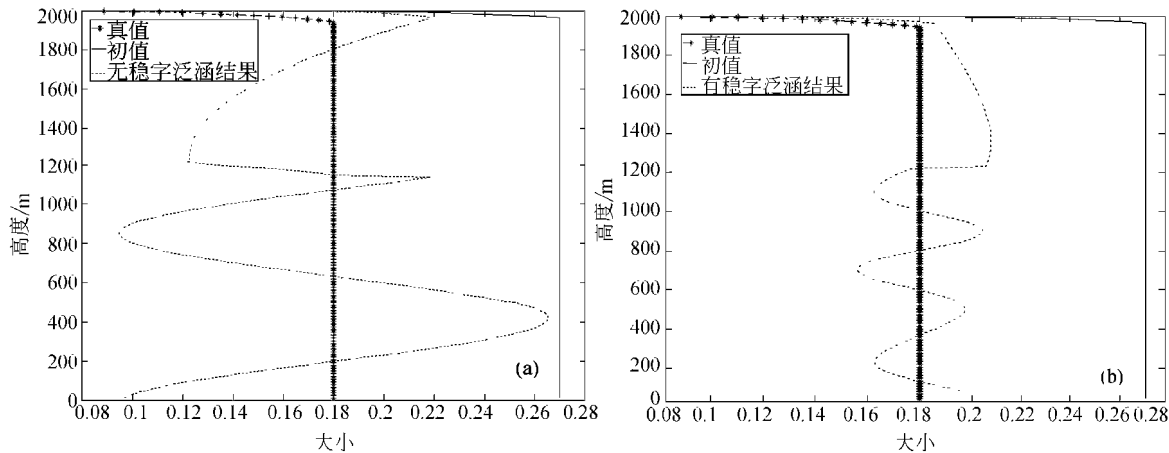


图 3 水平方向摩擦系数( $c_d$ )的真值、迭代初值、反演结果的比较

(a) 无稳定泛涵时的比较  $\|c_d^l - c_d^T\|_2 = 3.264734$ ; (b) 有稳定泛涵时的比较,  $\|c_d^l - c_d^T\|_2 = 0.824131$

反演模式.

选取模式迭代初值为:

$$\beta_1(\text{迭代初值}) = \beta_1^T \times 1.5, \beta_2(\text{迭代初值}) = \beta_2^T \times 1.5, u_f(\text{迭代初值}) = u_f^T + 0.5 \sin t, w_f(\text{迭代初值}) = w_f^T + 0.2 \sin t [0.1 \times (t - t_f)],$$

系数  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 5, \gamma_3 = 0.0007, \gamma_4 = 0.0001$ .

反演结果如图 3~6 所示, 利用数值计算结果, 我们可以得到以下结论:

(1) 目标泛涵随着迭代次数的增加而同步下降, 最终确定的最优解远离初始值向精确值逼近.

(2) 对于垂直气流和摩擦系数的联合反演, 在引进了稳定泛涵后, 通过选取合适的正则化系数,

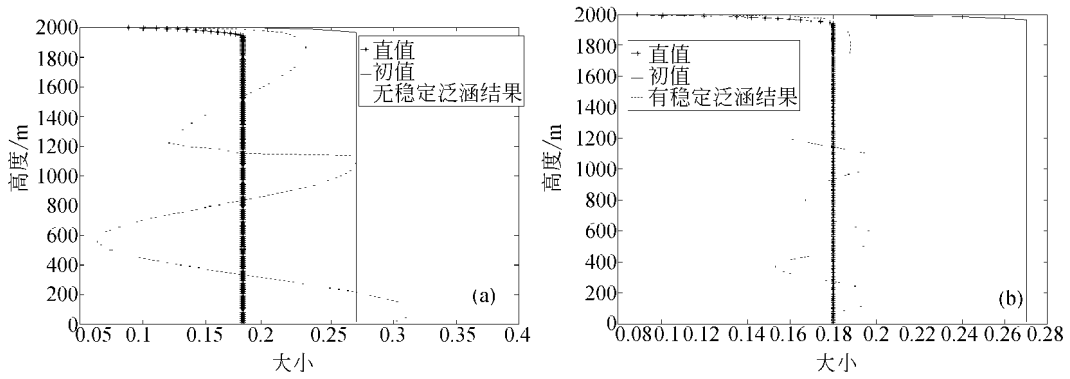


图4 垂直方向摩擦系数( $c_d$ )的真值、迭代初值、反演结果的比较

(a) 无稳定泛函时的比较  $\|c_d^1 - c_d^T\|_{L^2} = 1.818580$ ; (b) 有稳定泛函时的比较,  $\|c_d^1 - c_d^T\|_{L^2} = 0.342249$

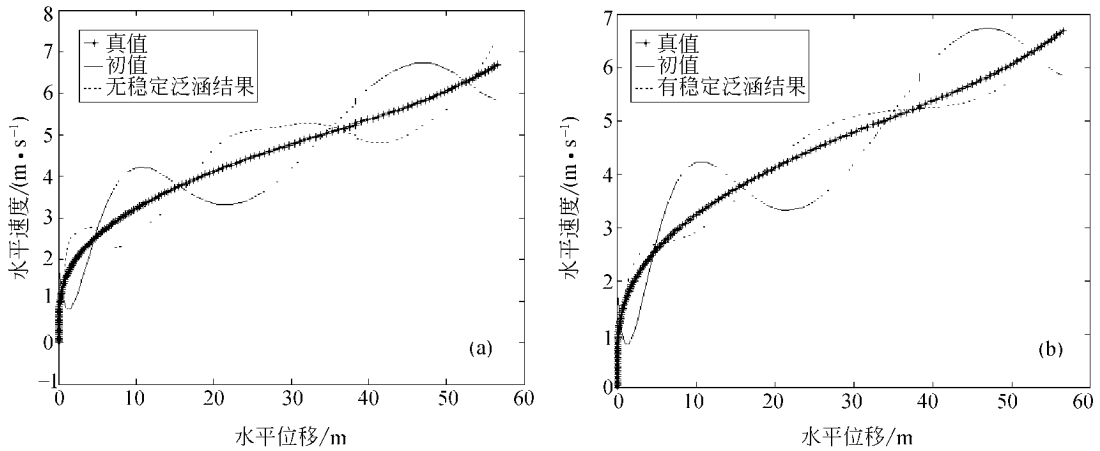


图5 水平气流的真值、迭代初值、反演结果的比较

(a) 无稳定泛函时的比较,  $\|\mu^1 - u^T\|_{L^2} = 74.18769$ ; (b) 有稳定泛函时的比较,  $\|\mu^1 - u^T\|_{L^2} = 9.962205$

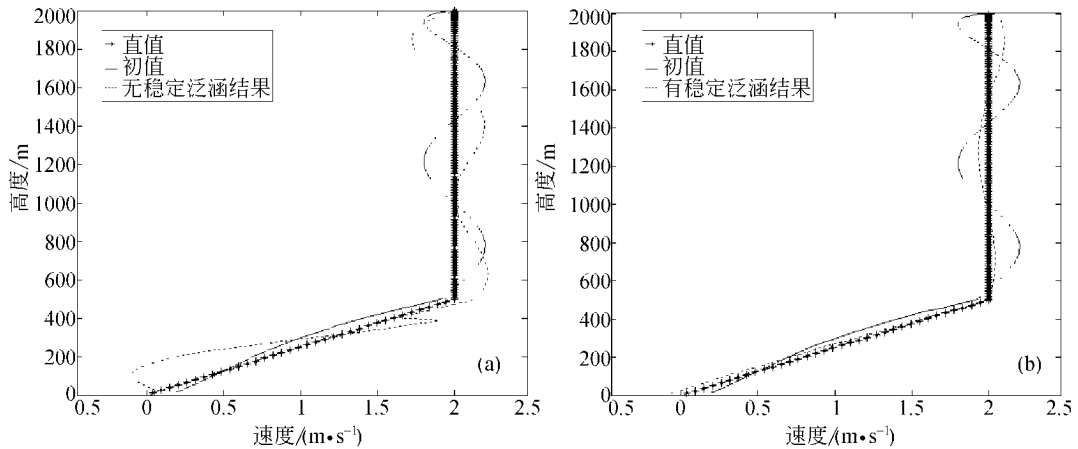


图6 垂直气流的真值、迭代初值、反演结果的比较

使原先目标泛函下降较慢得到有效的改进, 大大加速了目标泛函下降的速度.

(3) 对于垂直气流和摩擦系数的联合反演, 由于问题本身的不适定性, 在引进正则化泛函后精度比不引进正则化泛函有大幅度的提高, 由此证明正则化泛函的引进对于垂直气流及摩擦系数的反演是十分必要的.

(4) Fraitue 的信息淡化理论<sup>[12]</sup>认为, 对于给定数量的观测值, 其信息量是有限的, 模型反演的参数越多, 能传递到待反演参数中的信息量就越少. 对于下投式探空仪中多参数反演, 正则化泛函的引入能够控制观测资料信息流向信息利用率高的参数, 最充分利用数据包括的有效信息, 最大程度地减少参数的不确定性, 从而使得计算收敛且稳定.

#### 4 结论

本文假定探空仪的定位数据是完全精确的. 我们在变分伴随的基础上引进了正则化思想, 使得反演精度有了明显提高, 迭代次数减少、泛函下降速度加快. 而正则化参数是作为一个先验参数确定的, 它们的确定是一个复杂的过程, 一方面利用量纲分析确定, 另一方面从数值试验得出, 至于正确确定正则化参数可参阅<sup>[6, 13]</sup>, 此时解与正则化参数同时迭代得出, 这样造成计算大大增加, 本文仅说明正则化方法对下投式探空仪反演的重要性.

在本文的数值试验中, 我们假定空气的密度为常数,  $\beta_1(t)$  和  $\beta_2(t)$  分别代表水平方向和垂直方向的摩擦系数, 目的是把反演的摩擦系数和理论流体力学中的解析结果作比较, 说明本方法的有效性. 实际的大气是一个斜压的过程, 密度随着高度而变化. 为了实际应用的需要把  $\alpha_3\beta_1(t)$  和  $\alpha_3\beta_2(t)$  作为新的  $\beta_1(t)$  和  $\beta_2(t)$  进行反演, 这样本模型就可以体现大气的斜压性、密度随高度的变化.

下投式探空仪是测定高空气象要素的重要手段. 设计精确的下投式探空仪反演风场的数学模型是设计下投式探空仪的核心技术之一. 本文首先建立了示踪物在背景流场中的运动方程, 利用最优控

制理论中的变分伴随方法结合反问题的正则化思想给出了二维的反演模型, 并进行了数值试验. 计算结果表明我们根据正则化思想建立新的目标泛函不仅大大改进了迭代下降的速度, 而且对背景流场和摩擦系数的反演精度也有较大的提高. 本文所构造的反演模型, 其原理和方法具有普遍性, 经过适当的修改既可用于实际定位资料的三维风场反演, 投入实际使用, 也可以用于反演不同流体背景的流场如利用海上的浮标反演海流等.

#### 参 考 文 献

- 1 Lions J. J. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York: Springer Verlag, 1971. 100~118, 272~295
- 2 Le Dimet, et al. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations. Theoretical Aspect Tellus 1986, 38A: 97
- 3 Taghgrant, et al. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation, Part I. Theory Quart J Roy Meter Soc, 1987, 113: 1311
- 4 丑纪范. 四维同化的理论和新方法. 见: 数值天气预报中的若干新技术. 北京: 气象出版社, 1995. 262~294
- 5 Morozov V A. Choice of parameter for the solution of functional equations by the regularization method. Sov Math Doklady, 1967, 8: 1000
- 6 Tikhonov A N, et al. Solutions of Ill-Posed Problems. Washington, V H Winston & Sons, 1977
- 7 Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. New York: Springer-Verlag, 1996. 23~45, 48~53
- 8 肖庭延, 等. 反问题的数值解法. 北京: 科学出版社, 2003. 18~44
- 9 黄思训, 等. 结合反问题技巧对一维海温模式变分资料同化的理论分析及数值试验. 中国科学, D 辑, 2003, 33(9): 903
- 10 Huang S X, et al. Application of Regularization Ideas in Ill-Posed Problems of Ocean Variational Data Assimilation with Local Observation. Shanghai. Shanghai University Press, 2002. 840~844
- 11 Chow C Y. An Introduction to Computational Fluid Mechanics. New York: Chichester, Brisbane, Toronto, Colorado University Press, 1989. 1~62
- 12 Fraitue L. The information dilution theory. ESA J, 1986, 10: 381
- 13 李俊, 等. 改进的偏差原则在大气红外遥感及反演中的应用. 中国科学, D 辑, 2001, 31(1): 74